تمارين في المتتاليات رقم 1 + 2

التمرين رقم 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$.

يعطى المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بــ : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1) أ) باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ، عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب) أعط تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n-1>0$.

ب) برهن صحة التخمين المذكور في السؤال (1) - ب -

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية ، أساسها هو : $\dfrac{1}{3}$.

ب) عبّر بدلالة n عن كل من u_n وَ v_n .

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 02 :

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n}$.

1) برهن أنّ جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة.

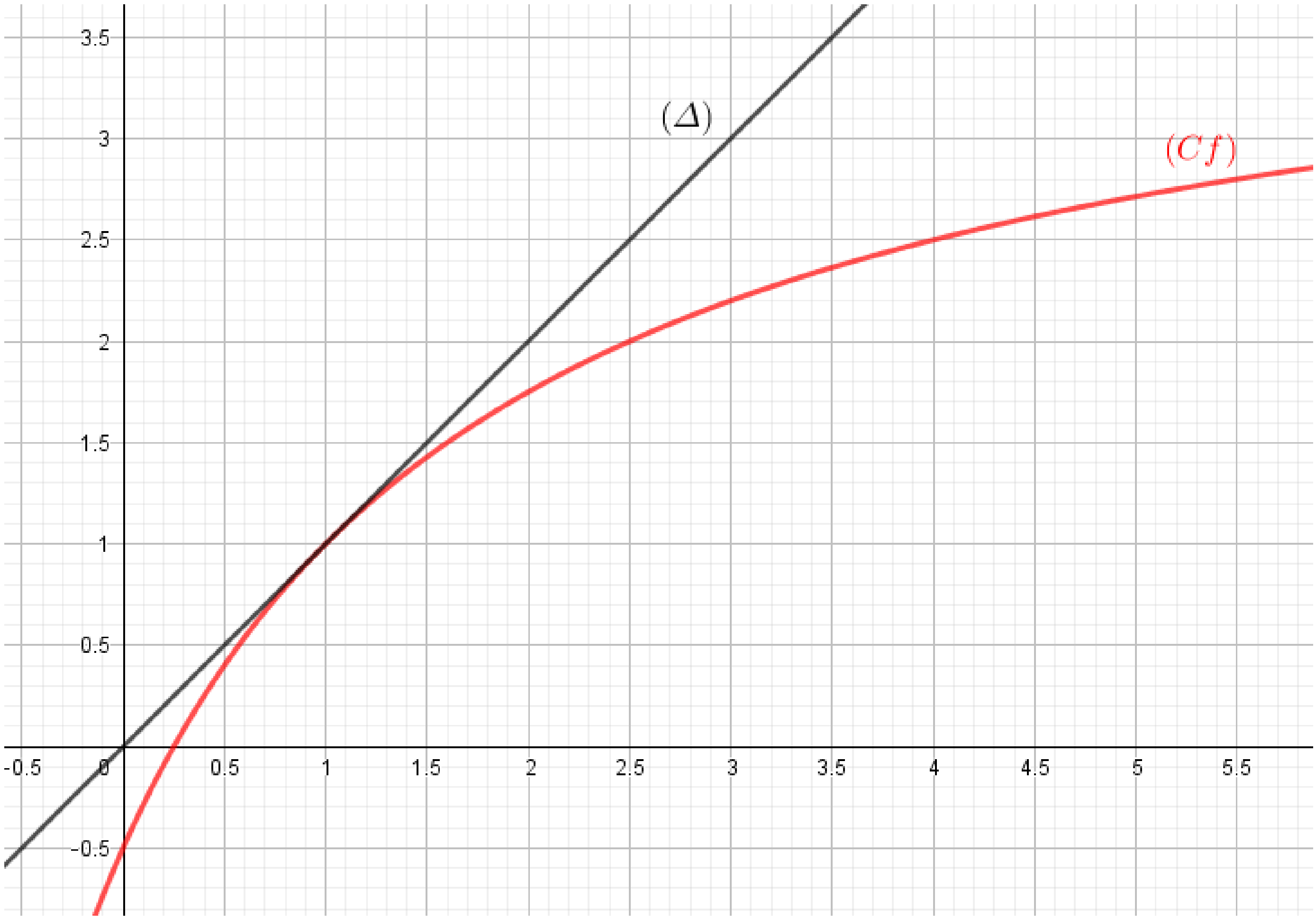
2) بيّن أنّه إن كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تكون حلاً للمعادلة : $x^2+x-2=0$.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب) برّر أنّ المتتالية (v_n) متقاربة ، ثمّ حدد نهايتها .

4) عبّر عن u_n بدلالة n ، ثمّ حدد نهاية المتتالية (u_n) .



(الوثيقة المرفقة بالتمرين رقم 01)

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم 3 + 4

التمرين رقم 03 :

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

أ) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نمثّل المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$.

❖ أنشئ على محور الفواصل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) .

ب) بيّن أنّه إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تكون تساوي : $\frac{23}{18}$.

ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $u_n \geq \frac{23}{18}$.

د) أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثمّ أعط نهايتها .

2) نعتبر n عدد طبيعي غير معدوم :

أ) برهن أنّ : $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + ... + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}(1 - \frac{1}{10^n})$.

ب) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1,2\underbrace{777.....7}_{n}$.

بهذا يكون : $v_0 = 1,2$ ، $v_1 = 1,27$ ، $v_2 = 1,277$ ، .... و هكذا .

❖ باستعمال السؤال (أ) بيّن أنّ نهاية المتتالية (v_n) هي عدد ناطق r .

3) هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ ، برّر إجابتك .

التمرين رقم 04 :

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c التي تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية متزايدة حيث : $\begin{cases} a \times b \times c = 216 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 133 \end{cases}$

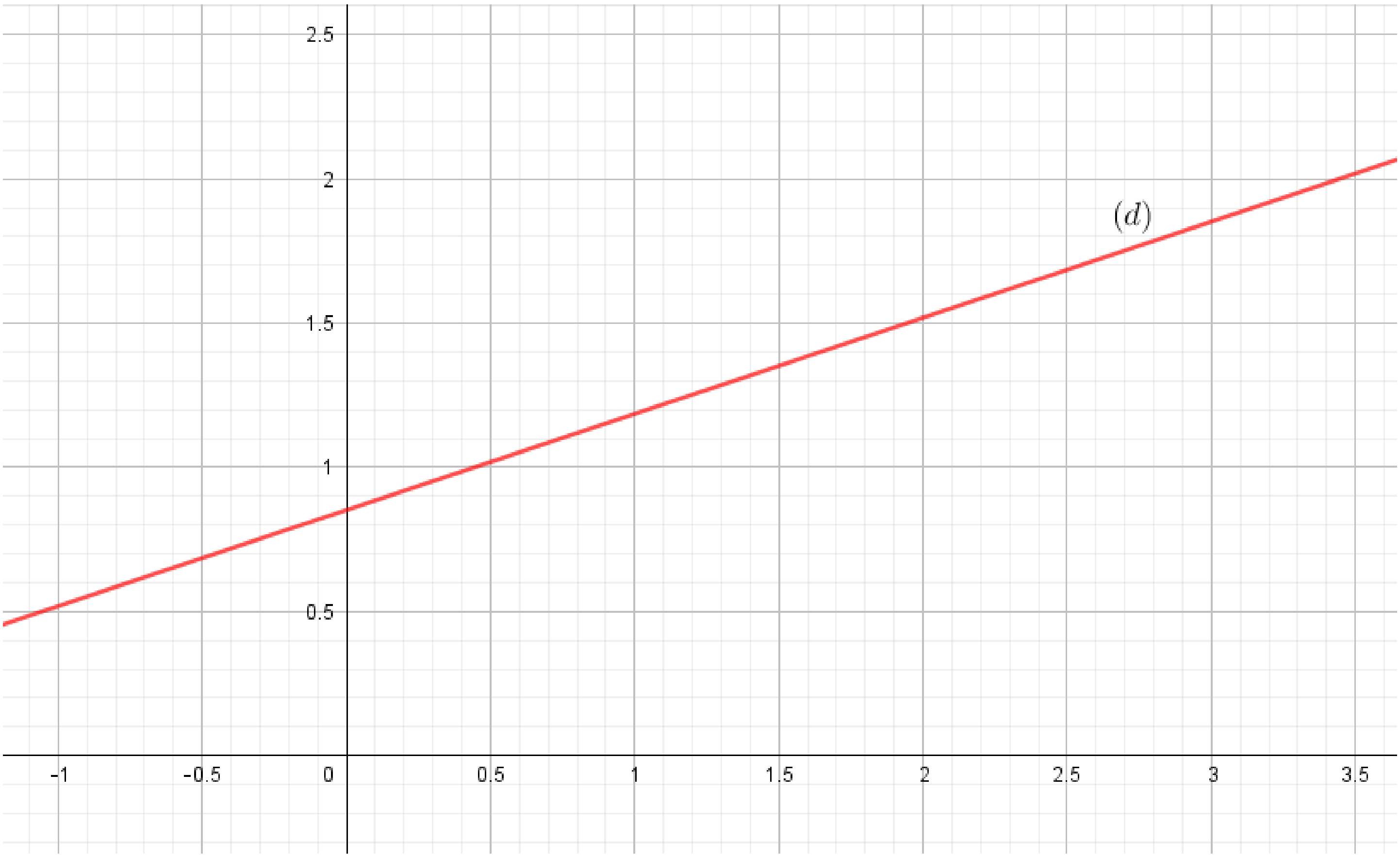
2) نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$ وَ $v_n = u_n + \alpha$ ، $(\alpha \in \mathbb{R})$

أ) عيّن قيمة α حتّى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وَ حدّها الأوّل .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = 9 \times (\frac{2}{3})^n + 3$. ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

3) ماهي طبيعة المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln(v_n)$ ؟ .

4) أحسب الجداء P_n حيث : $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times .... \times (u_n - 3)$.



(الوثيقة المرفقة بالتمرين رقم 03)

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم 5 + 6 + 7

التمرين رقم 05 :

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > n^2$.

❖) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) ما طبيعة المتتالية (w_n) .

ب) أحسب المجموع : $S_{n-1} = w_0 + w_1 + ... + w_{n-1}$

جـ) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

التمرين رقم 06 :

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول حيث : $u_0 > 0$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$

1) أ)عيّن العددين الحقيقيين a وَ b بحيث يكون : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$

2) عيّن u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

3) نفرض أنّ : $u_0 = 3$ ، وَ نضع : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + \alpha}$ ، حيث $(\alpha \in \mathbb{R})$.

❖) حدّد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وَ حدها الأول v_0 .

❖) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

4) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + ... + \frac{1}{u_n + 1}$.

التمرين رقم 07 :

(u_n) متتالية معرّفة بـ : $u_0 = e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e^2$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة ؟ .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$.

❖) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

❖) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثمّ u_n بدلالة n . ماهي نهاية كل من المتتاليتين (v_n) وَ (u_n) ؟ .

4) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times .... \times u_n$.

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم : 8 + 9

التمرين رقم 08 :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = (\dfrac{n+1}{2n})u_n \end{cases}$.

1) أحسب الحدود التالية : u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n > 0$.

ب) برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) ؟.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل v_1 .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\left[1;+\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = \ln x - x\ln(2)$.

أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 09 :

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

و من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

❖ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل v_0 .

2) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} = (\dfrac{1}{2})^{n+1} \times u_n$.

3) بيّن إذن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = (\dfrac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

4) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ حدد نهايتها .

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم : (10+11+12+13+14+15)

التمرين رقم 10 :

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \frac{1}{2}$.

جـ) عيّن أصغر عدد طبيعي p ، بحيث : إذا كان : $n \geq p$ ، فإن : $v_n < \frac{3}{4}$.

د) إستنتج أنّه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

2) نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$.

جـ) إستنتج أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$.

3) بيّن أنّ المتتالية $(S_n)_{n \geq 5}$ متزايدة ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

التمرين رقم 11 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، و من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1) لتكن المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

ب) إستنتج عبارة s_n بدلالة n .

2) نضع : $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $t_n = v_{n+1} - v_n$.

❖) عبّر عن t_n بدلالة s_n .

3) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n . (يمكن حساب المجموع : $t_0 + ... + t_{n-1}$ ، بطريقتين مختلفتين) .

❖) عيّن عند ئذ النهاية : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{u_n}{8^n})$.

التمرين رقم 12 :

ليكن θ عدد حقيقي حيث : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على n كما يلي : $u_0 = 2\cos(\theta)$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

1) أحسب الحدود : u_1 ، u_2 وَ u_3 . (تذكر أنّ : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$.

3) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 13 :

نعرّف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ ، إذا وافقط إذا كان : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد α من المجال $[1;+\infty[$ بحيث : $f(\alpha) = 1,9$.

ج) عيّن العدد الطبيعي n_0 ، بحيث يكون : $n_0 - 1 < \alpha < n_0$.

د) برهن أنّه من أجل كل $n \geq 16$ ، يكون : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

3) أ) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) إبتداءا من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟

4) أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل $n \geq 16$ يكون : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 14 :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$.

ب) إستنتج أنّ الدالة f فردية.

2) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل من أجل كل x من $\mathbb{R}$ تكون : $f'(x) = -\frac{1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

جـ) إستنتج أنّه من أجل كل $x \geq 0$ يكون : $1-\frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$.

4) بيّن أنّ : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-\frac{1}{2}x)\right]=0$ ، ماذا تستنتج ؟ .

5) أنشئ المنحنى (C) .

الجزء الثاني :

نعرّف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1} \end{cases}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل طبيعي n تكون : $u_n>0$.

2) **من السؤال 3) ـ جـ) الجزء الأول** تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

❖) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

3) بين أنّه من أجل كل طبيعي n يكون : $u_n \leq (\frac{1}{2})^n$.

❖) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 15 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$.

1) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

ج) عيّن النهاية l للمتتالية (u_n) .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\pi]$ يكون : $\cos(\frac{x}{2})=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

ب) بيّن إذن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n=\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

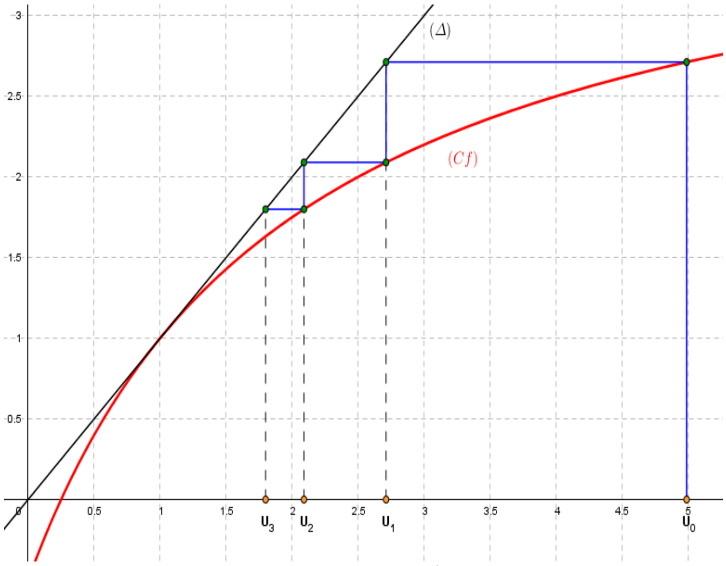
ج) جد ثانية النهاية l للمتتالية (u_n) .

كتابة الأستاذ : ب . ع

حلول تمارين المتتاليات

حل التمرين الأول :

1) أ) الإنشاء :



ب) التخمين : نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و تقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) .

2) أ) البرهان بالتراجع : $u_n - 1 > 0$.

*) التحقق من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 5$ ، أي : $u_0 - 1 > 0$ ، إذن محققة .

*) نفرض أنّ : $u_n - 1 > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} - 1 > 0$

لدينا فرضا : $u_n - 1 > 0$ أي : $u_n > 1$ ، و بما أنّ الدالة f متزايدة على $]-2;+\infty[$ فإنّ : $f(u_n) > f(1)$ ،
أي : $u_{n+1} > 1$ ، و منه : $u_{n+1} - 1 > 0$.

و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 1$.

ب) لنبرهن صحة التخمين :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n + 2}$$

و منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة ، و بما أنّها محدودة من الأسفل بـ 1 ، فهي متقاربة .

3) أ) لنحسب : v_{n+1}

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}}$$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$.

*) لنحسب الفرق : $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{3}{3(u_n - 1)}$$

أي : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}$.

إذن : $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}$.

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول :

$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$.

ب) *) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}$.

*) عبارة u_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ، أي :

$u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ ، أي : $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$.

و منه : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1$.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1 \right] = 1$$

حل التمرين الثاني :

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$.

1) لنبرهن بالتراجع أنّ جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة :

*) تحقق من أجل $n = 0$: $u_0 = 3$ ، أي : $u_0 > 0$

و منه : محققة من أجل $n = 0$.

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و نثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$

لدينا : $u_n > 0$ ، و منه : $\frac{2}{1+u_n} > 0$ ، أي : $u_{n+1} > 0$

*) و أخيرا من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$

2) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

و بما أنّ : $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$ ، فإنّ : $l = \frac{2}{1+l}$ ، و منه : $l^2 + l - 2 = 0$ ، أي أنّ l هو حل للمعادلة $x^2 + x - 2 = 0$

هذه الأخيرة تقبل حلين هما : $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$.

و عليه : نختار $l = 1$ ، لأنّ حدود المتتالية (u_n) موجبة .

3) لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ) لنبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

$$= \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2}v_n$$

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ ،

و حدها الأول : $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{2}{5}$.

و منه : $v_n = \frac{2}{5} \times (-\frac{1}{2})^n$.

ب) بما أنّ الأساس q يحقّق : $-1 < q < 1$ ، إذن : المتتالية (v_n) تتقارب نحو 0 .

4) عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ ، أي : $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$

أي : $v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$ ، أي : $u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$ ، أي : $u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$

و منه : $u_n = \dfrac{-2 \times \frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n - 1}$.

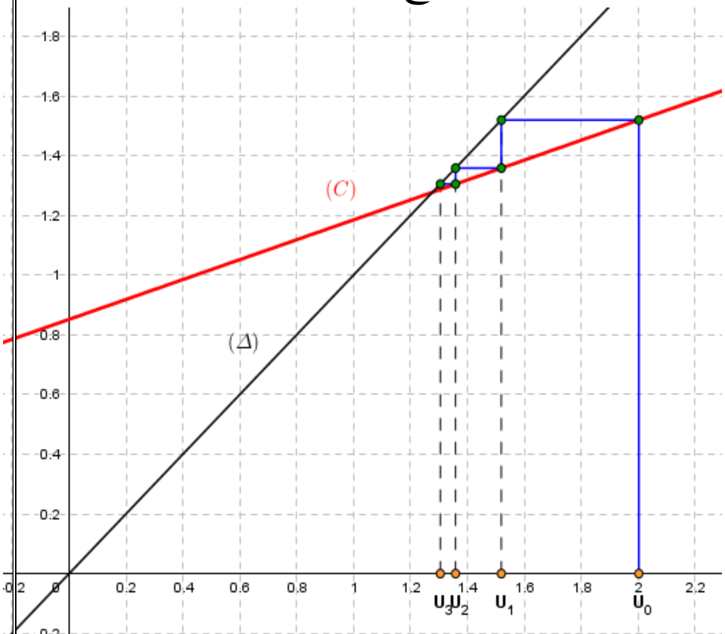
*) تحديد نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$.

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

حل التمرين الثالث :

1) أ) تمثيل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) :



ب) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

و بما أنّ : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ ، فإنّ :

: أي ، $l-\frac{1}{3}l=\frac{23}{27}$: أي ، $l=\frac{1}{3}l+\frac{23}{27}$

. $l=\frac{23}{18}$: و منه ، $l=\frac{23}{27}\times\frac{3}{2}$: أي ، $\frac{2}{3}l=\frac{23}{27}$

ج) لنبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq\frac{23}{18}$

*) لنتحقق من أجل $n=0$: $u_0=2$ ، أي : $u_0\geq\frac{23}{18}$

*) لنفرض أنّ : $u_n\geq\frac{23}{18}$ و نثبت أنّ : $u_{n+1}\geq\frac{23}{18}$

لدينا فرضا : $u_n\geq\frac{23}{18}$ ، أي : $\frac{1}{3}u_n\geq\frac{23}{54}$ ، أي :

$\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}\geq\frac{23}{54}+\frac{23}{27}$ ، أي : $u_{n+1}\geq\frac{23}{54}+\frac{46}{54}$

أي : $u_{n+1}\geq\frac{69}{54}$ ، و منه : $u_{n+1}\geq\frac{23}{18}$.

و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n\geq\frac{23}{18}$.

د) لندرس رتابة المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}-u_n=-\frac{2}{3}u_n+\frac{23}{27}$$

*)نعلم أنّ : $u_n\geq\frac{23}{18}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n\leq-\frac{46}{54}$ ، أي :

$-\frac{2}{3}u_n\leq-\frac{23}{27}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n+\frac{23}{27}\leq 0$ ،

و منه : $u_{n+1}-u_n\leq 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل فهي متقاربة

و نهايتها تساوي $\frac{23}{18}$.

2) أ) البرهان على المساواة :

نلاحظ أنّ : $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+...+\frac{1}{10^{n+1}}$ هو

مجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ و حدها الأول $\frac{1}{10^2}$ ،

عدد هذه الحدود هو : n حد . نسمي المجموع بـ : S_n .

$$S_n=\frac{1}{10^2}\times\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10^2}\times\frac{10}{9}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]$$

و منه : $S_n=\frac{1}{90}\times(1-\frac{1}{10^n})$. و هو المطلوب .

ب) لدينا : $v_n=1,2\underbrace{77....7}_{n}$ ، أي :

$$v_n=1,2+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{7}{10^4}+....+\frac{7}{10^{n+1}}$$

$$=1,2+7(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+....+\frac{1}{10^{n+1}})$$

و منه : $=1,2+7\times\frac{1}{90}\times\left[1-(\frac{1}{10^n})\right]$

*) نعلم أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{10})^n=0$ ، إذن :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=(1,2+\frac{7}{90})=\frac{12}{10}+\frac{7}{90}=\frac{108+7}{90}$$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{115}{90}=\frac{23}{18}$ ، (عدد ناطق) .

3) المتتالية (u_n) متناقصة و المتتالية (v_n) متزايدة ،

و لهما نفس النهاية l ، إذن فهما متجاورتان .

حل التمرين الرابع :

1) لدينا : $\begin{cases}a\times b\times c=216\\ a^2+b^2+c^2=133\end{cases}$ وَ بما أنّ الأعداد c,b,a

حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $a\times c=b^2$

أي : $b\times b^2=216$ ، و منه : $b^3=216$ ،

أي : $b=6$. بالتعويض نجد : $\begin{cases}a\times c=36\\ a^2+c^2=97\end{cases}$ ، أي :

$\begin{cases}c=\frac{36}{a}\\ a^2+c^2=97\end{cases}$ ، أي : $a^2+(\frac{36}{a})^2=97$ ، أي :

$\frac{a^4+1296}{a^2}=97$ ، و منه : $a^4-97a^2+1296=0$

بوضع $X=a^2$ نجد : $X^2-97X+1296=0$ ،

أي : $\Delta = 4225$ ، ومنه : $\begin{cases} X_1 = 16 \\ X_2 = 81 \end{cases}$ ، أي :

$\begin{cases} a=4 \\ a=-4 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a=9 \\ a=-9 \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} a=9 \\ b=6 \\ c=4 \end{cases}$ مرفوضة ،

$\begin{cases} a=-9 \\ b=6 \\ c=-4 \end{cases}$ مرفوضة ، $\begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ a=-9 \end{cases}$ مرفوضة ، $\begin{cases} a=4 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases}$ ص .

2) أ) تعيين قيمة α : لدينا $v_n = u_n + \alpha$ ، أي :

$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$ ، أي : $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 + \alpha$ ، أي :

$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - \alpha) + 1 + \alpha$ ، أي :

$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}\alpha + 1$ ، إذن : (v_n) هندسية معناه :

$\frac{1}{3}\alpha + 1 = 0$ ، أي : لما $\alpha = -3$ تكون المتتالية (v_n)

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وَ حدها الأول $v_0 = 9$.

ب) أوّلا نعيّن عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n$ ،

و منه : $v_n = 9 \times (\frac{2}{3})^n$.

الآن نعيّن عبارة u_n بدلالة n : لدينا $u_n = v_n - \alpha$ ،

أي : $u_n = v_n + 3$ ، ومنه : $u_n = 9 \times (\frac{2}{3})^n + 3$

حساب نهاية (u_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$.

3) لدينا : $w_n = \ln(v_n)$ ، أي : $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$ ،

أي : $w_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}v_n)$ ، أي :

$w_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}) + \ln(v_n)$ ، و منه :

$w_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}) + w_n$.

إذن : (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(\frac{2}{3})$

وَ حدها الأول : $w_0 = \ln(9)$.

4) حساب الجداء :

$P_n = (u_0 - 3)\times(u_1 - 3)\times....\times(u_n - 3)$ ،

لدينا : $u_n - 3 = v_n$ ،

أي : $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$ ، أي :

$P_n = v_0 \times (v_0.q) \times (v_0.q^2) \times .... \times (v_0.q^n)$ ، أي :

$P_n = (v_0 \times v_0 \times ... \times v_0)(q \times q^2 \times ... \times q^n)$ ، و منه :

$P_n = v_0^{n+1} \times q^{\frac{(n+1)n}{2}}$ ، أي : $P_n = 9^{n+1} \times (\frac{2}{3})^{\frac{n^2+n}{2}}$

حل التمرين الخامس :

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

1) لنبرهن بالتراجع أنّ : $u_n > n^2$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 > 0^2$ ، و منه :

$1 > 0$ ، (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > n^2$ ، و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > (n+1)^2$

لدينا فرضا : $u_n > n^2$ ، أي : $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

أي : $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1 + 2$ ، أي : $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$

و منه : $u_{n+1} > (n+1)^2$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > n^2$.

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

بما أنّ : $u_n > n^2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$.

بالمقارنة نستنتج أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ ، نلاحظ أنّ : $u_{n+1} - u_n > 0$

و منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3) لدينا : $w_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) طبيعة المتتالية (w_n) : لدينا : $w_n = 2n + 3$

أي : $w_{n+1} = 2(n+1) + 3$ ، أي : $w_{n+1} = 2n + 2 + 3$

أي : $w_{n+1} = 2n+3+2$ ، و منه : $w_{n+1} = w_n + 2$

إذن : المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 و حدها الأول 3 .

ب) حساب المجموع S_{n-1} :

$S_{n-1} = w_0 + w_1 + ... + w_{n-1}$ ، أي :

$S_{n-1} = \frac{(w_0 + w_{n-1})n}{2} = \frac{(3+2n+1)n}{2}$ ، أي :

$S_{n-1} = \frac{(2n+4)n}{2} = \frac{2(n+2)n}{2} = n^2 + 2n$.

ج) إستنتاج عبارة u_n :

لدينا : $w_n = u_{n+1} - u_n$ ، أي :

$$\begin{cases} w_0 = u_1 - u_0 \\ w_1 = u_2 - u_1 \\ w_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$ بالجمع نجد : $S_{n-1} = u_n - u_0$ ،

أي : $u_n = S_{n-1} + u_0$ ، أي : $u_n = n^2 + 2n + 1$

و منه : $u_n = (n+1)^2$.

*) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (n+1)^2 = +\infty$.

حل التمرين السادس :

لدينا : $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) أ) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$\frac{au_n + 4a + b}{u_n + 4} = a + \frac{b}{u_n + 4} = u_{n+1}$ ، بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a = 5 \\ 4a + b = 2 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a = 5 \\ b = -18 \end{cases}$.

إذن : $u_{n+1} = 5 - \frac{18}{u_n + 4}$.

ب) البرهان بالتراجع على أنّ : $u_n > 0$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 > 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : $u_n > 0$ ، أي : $5u_n + 2 > 0$ و أيضا : $u_n + 4 > 0$

و منه : $\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} > 0$ ، أي : $u_{n+1} > 0$ ، و هو المطلوب

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 0$.

2) تعيين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان : $u_{n+1} = u_n = u_0$ ،

أي : $u_0 = \frac{5u_0 + 2}{u_0 + 4}$ ، أي : $u_0^2 + 4u_0 = 5u_0 + 2$

أي : $u_0^2 - u_0 - 2 = 0$ ، و منه سيكون :

$u_0 = -1$ (مرفوض) ، أو $u_0 = 2$ (مقبول) .

3) لدينا : $u_0 = 3$ و $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + \alpha}$.

*) تعيين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

لنحسب : v_{n+1} .

$$v_{n+1} = \frac{\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} - 2}{\frac{5u_n + 2}{u_n + 4} + \alpha} = \frac{\frac{5u_n + 2 - 2u_n - 8}{u_n + 4}}{\frac{u_n + 2 + \alpha u_n + 4\alpha}{u_n + 4}}$$

$$= \frac{3u_n - 6}{5u_n + \alpha u_n + 4\alpha + 2} = \frac{3(u_n - 2)}{(5+\alpha)u_n + 4\alpha + 2}$$

و منه : $v_{n+1} = \frac{3(u_n - 2)}{(5+\alpha)\left[u_n + \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}\right]}$.

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان :

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}}$ ، أي : $\frac{u_n - 2}{u_n + \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}} = \frac{u_n - 2}{u_n + \alpha}$

بالمطابقة نجد : $\alpha = \frac{4\alpha + 2}{5 + \alpha}$ ، أي : $\alpha^2 + 5\alpha = 4\alpha + 2$

و منه : $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ ، إذن سيكون :

$\alpha = -2$ أو $\alpha = 1$.

*) حالة : $\alpha = -2$ يكون : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1$ ،

هنا المتتالية (v_n) تصبح ثابتة ، إذن هذه حالة مرفوضة .

*) حالة : $\alpha=1$ يكون : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$.

و يصبح : $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_0=\dfrac{u_0-2}{u_0+1}=\dfrac{1}{4}$.

*) عبارة v_n : $v_n=\dfrac{1}{4}\times(\dfrac{1}{2})^n$ و منه : $v_n=\dfrac{1}{2^{n+2}}$.

*) عبارة u_n : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ ، أي: $v_nu_n+v_n=u_n-2$

أي : $v_nu_n-u_n=-v_n-2$ ، أي : $u_n(v_n-1)=-v_n-2$

أي : $\dfrac{-\dfrac{1}{2^{n+2}}-2}{\dfrac{1}{2^{n+2}}-1}=\dfrac{-v_n-2}{v_n-1}=u_n$ ، أي :

$u_n=\dfrac{\dfrac{-1-2\times2^{n+2}}{2^{n+2}}}{\dfrac{1-2^{n+2}}{2^{n+2}}}$ ، و منه : $u_n=\dfrac{-1-2^{n+3}}{1-2^{n+2}}$

4) حساب المجموع S_n :

$S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+.....+\dfrac{1}{u_n+1}$.

لدينا : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}=\dfrac{u_n+1-3}{u_n+1}=1-\dfrac{3}{u_n+1}$ ،

و منه : $\dfrac{3}{u_n+1}=1-v_n$ ، أي : $\dfrac{1}{u_n+1}=\dfrac{1-v_n}{3}$ ،

إذن : $S_n=\dfrac{1-v_0}{3}+\dfrac{1-v_1}{3}+.....+\dfrac{1-v_n}{3}$ ،

أي : $S_n=\dfrac{\overbrace{(1+1+...+1)}^{n}-(v_0+v_1+...+v_n)}{3}$

أي : $S_n=\dfrac{(n+1)-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-(\dfrac{1}{2})^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}}{3}$ ،

إذن : $S_n=\dfrac{n+1}{3}-\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\left[1-(\dfrac{1}{2})^{n+1}\right]}{3}$.

حل التمرين السابع :

لدينا : $u_0=e^3$ و $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$.

1) إثبات أنّ : $u_n>e^2$ ، (نستعمل البرهان بالتراجع)

*) التحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ ،

لدينا : $u_0=e^3$ أي : $u_0>e^2$ محقّقة .

*) نفرض صحة الخاصية عند n ، أي : $u_n>e^2$.

*) و نبرهن صحة الخاصية عند $n+1$ ، أي : $u_{n+1}>e^2$.

لدينا فرضا $u_n>e^2$ ، أي : $\sqrt{u_n}>e$ ،

أي : $e\sqrt{u_n}>e^2$ ، إذن : $u_{n+1}>e^2$. وهو المطلوب

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>e^2$.

2) إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : أي نحسب :

$u_{n+1}-u_n=e\sqrt{u_n}-u_n$ ، أي :

$$u_{n+1}-u_n=e\sqrt{u_n}-u_n\times\frac{e\sqrt{u_n}+u_n}{e\sqrt{u_n}+u_n}=\frac{e^2u_n-u_n^2}{e\sqrt{u_n}+u_n}$$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(e^2-u_n)}{e\sqrt{u_n}+u_n}$.

*) بما أنّ : $u_n>e^2$ معناه : $e^2-u_n<0$ ، ومنه :

$u_{n+1}-u_n<0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

*) نعم المتتالية (u_n) متقاربة ، لأنّها متناقصة و محدودة من الأسفل بـ e^2 .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n)-2$

*) بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية : أي نحسب :

$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2$ ، أي: $v_{n+1}=\ln(e\sqrt{u_n})-2$

ومنه: $v_{n+1}=\ln e+\ln\sqrt{u_n}-2$ ، أي

$v_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}\ln(u_n)-2$ ، أي :

$v_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(u_n)-1$ ، ومنه :

$v_{n+1}=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)$ ، إذن : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ ،

و عليه فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

وَ حدّها الأول : $v_0=\ln(u_0)-2$ ، أي :

$v_0=\ln(e^3)-2$ ، ومنه : $v_0=1$.

*) عبارة v_n : $v_n=v_0\times(q)^n$ ، أي : $v_n=(\frac{1}{2})^n$.

*) عبارة u_n : $v_n=\ln(u_n)-2$ ، أي : $\ln(u_n)=v_n+2$

أي : $u_n=e^{v_n+2}$ ، إذن : $u_n=e^{((\frac{1}{2})^n+2)}$.

*) حساب النهايات :

أ) نهاية المتتالية (v_n) : $\lim_{n\to+\infty}(v_n)=0$ ، لأنّ : $-1<q<1$

ب) نهاية المتتالية (u_n) :

$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}e^{((\frac{1}{2})^n+2)}=e^2$.

4) حساب الجداء P_n : $P_n=u_0\times u_1\times....\times u_n$ ،

أي : $P_n=e^{(v_0+2)}\times e^{(v_1+2)}\times....\times e^{(v_n+2)}$ ، أي :

$P_n=e^{(v_0+v_1+...+v_n)}\times e^{(2+2+.....+2)}$ ، ومنه :

$P_n=e^{(S_n)}\times e^{2(n+1)}$.

*) حساب S_n : $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ، أي :

$S_n=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})}$ ، ومنه : $S_n=2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$.

إذن : $P_n=e^{2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]}\times e^{2(n+1)}$ ،

أي : $P_n=e^{2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]+2n+2}$. (بالإمكان التبسيط أكثر لـ P_n)

حل التمرين الثامن :

لدينا : $u_1=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$.

1) حساب الحدود :

*) $u_2=\frac{3}{4}u_1=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

*) $u_3=\frac{4}{6}u_2=\frac{4}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$.

*) $u_4=\frac{5}{8}u_3=\frac{5}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$.

2) أ) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n>0$.

*) لنتحقق من أجل $n=1$ ، أي : $u_1>0$ ،

و منه : $\frac{1}{2}>0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n>0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1}>0$.

لدينا فرضا أنّ : $u_n>0$ وَ بما أنّ : $\frac{n+1}{2n}>0$ ،

فسيكون : $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ ، أي : $u_{n+1}>0$.

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ يكون : $u_n>0$.

ب) لنبرهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n}u_n-u_n=(\frac{n+1}{2n}-1)u_n$$
$$=\frac{n+1-2n}{2n}u_n=\frac{1-n}{2n}u_n$$

*) بما أنّ : $n\geq 1$ فإنّ : $1-n\leq 0$.

و منه : $u_{n+1}-u_n\leq 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل

بـ 0 ، فهي متقاربة .

3) لدينا : $v_n=\frac{u_n}{n}$.

أ) لنبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1}=\frac{n+1}{2n}\times\frac{1}{n+1}u_n$$

أي : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}$ ، و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$.

ب) *) عبارة v_n : $v_n=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1+1}}=\frac{1}{2^n}$

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n}$ ، أي : $u_n = n \times v_n$ ، أي :

$u_n = n \times \frac{1}{2^n}$ ، و منه : $u_n = \frac{n}{2^n}$. و هو المطلوب .

4) لدينا : $f(x) = \ln x - x\ln(2)$.

أ) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln x - x\ln(2)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\ln x}{x} - \ln(2)\right] = -\infty$$

لأنّ : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

ب) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = \frac{n}{2^n}$ ، أي : $\ln u_n = \ln(\frac{n}{2^n})$ ، أي :

$\ln u_n = \ln n - \ln 2^n$ ، أي : $\ln u_n = \ln n - n\ln 2$

و منه : $\ln u_n = f(n)$.

*) بما أنّ : $\lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ ، إذن :

$\lim_{n\to+\infty}\ln u_n = -\infty$ ، و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

حل التمرين التاسع :

لدينا : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$ ،

أي : $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{2u_n}$.

1) لدينا : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_{n+1}^2}{2u_n}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}^2}{2u_n} \times \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{2u_n} ،$$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، و منه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_0 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

2) لنحسب v_n بدلالة n :

نعلم أنّ : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = \frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^n$ ،

و منه : $v_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

و لدينا : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، أي : $u_{n+1} = v_n \times u_n$ ،

و منه : $u_{n+1} = (\frac{1}{2})^{n+1} \times u_n$ ، و هو المطلوب .

3) لدينا : $u_{n+1} = (\frac{1}{2})^{n+1} \times u_n$ ، أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{1}{2})^{n+1}$

إذن : $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = (\frac{1}{2})^1 \\ \frac{u_2}{u_1} = (\frac{1}{2})^2 \\ \frac{u_3}{u_2} = (\frac{1}{2})^3 \\ \vdots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = (\frac{1}{2})^n \end{cases}$ بالضرب نجد :

$\frac{u_1}{u_0}\times\frac{u_2}{u_1}\times\frac{u_3}{u_2}\times.....\times\frac{u_n}{u_{n-1}} = (\frac{1}{2})^{1+2+3+.....+n}$ ،

أي : $\frac{u_n}{u_0} = (\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، بما أنّ : $u_0 = 1$ ، فسيكون :

$u_n = (\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، و هو المطلوب .

4) إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم تحديد نهايتها :

بما أنّ : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ ، فإنّ : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$.

و بما أنّ : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2} = +\infty$ ،

فإنّ : $\lim_{n\to+\infty}\left[(\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

حلول التمارين الخاصة بشعبتي الرياضي و التقني رياضي

حل التمرين العاشر :

لدينا : $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ ، مع $n \in \mathbb{N}^*$.

1) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) لنبيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\right] = \dfrac{1}{2}$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. و هو المطلوب .

ب) لنبيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

بما أنّ : $v_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$ و نعلم أنّ : $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} > 1$

أي : $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n+1)^2}{n^2} > \dfrac{1}{2}$ ، و منه : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

ج) تعيين p ، بحيث يكون : $v_n < \dfrac{3}{4}$.

لدينا : $v_n < \dfrac{3}{4}$ ، أي : $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(n+1)^2}{n^2} < \dfrac{3}{4}$ ، و هذا

يتحقق إذا كان : $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} < \dfrac{3}{2}$ ، أي : $2(n+1)^2 < 3n^2$

أي: $2(n^2+2n+1) < 3n^2$ ، أي: $-n^2+4n+2<0$

*) لندرس إشارة $-x^2+4x+2<0$ على $\mathbb{R}$:

بعد دراسة الإشارة نلاحظ أنّه :

يكون : $-n^2+4n+2<0$ إذا كان : $n > 2+\sqrt{6}$ ،

أي : $n > 4,44$ ، و منه : $n \geq 5$.

إذن : أصغر قيمة لـ n كي يكون $v_n < \dfrac{3}{4}$ هي : 5 .

أي أنّ : $p = 5$.

د) إذا كان : $p \geq 5$ أي : $n \geq 5$ فإنّ : $v_n < \dfrac{3}{4}$ ،

أي : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ ، و منه : $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$.

2) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) لنبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 5$: $u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-5}\times u_5$

*) لنتحقق من أجل $n=5$ ، أي : $u_5 \leq (\dfrac{3}{4})^{5-5}\times u_5$

أي : $u_5 \leq (\dfrac{3}{4})^{0}\times u_5$ ، و منه : $u_5 \leq u_5$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-5}\times u_5$ ، و لنثبت أنّ :

$u_{n+1} \leq (\dfrac{3}{4})^{n-4}\times u_5$.

لدينا: $u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-5}\times u_5$ ، أي: $\dfrac{3}{4}u_n \leq \dfrac{3}{4}\times(\dfrac{3}{4})^{n-5}\times u_5$

أي : $\dfrac{3}{4}u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-4}\times u_5$ ، و نعلم أنّ : $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$

إذن : $u_{n+1} \leq (\dfrac{3}{4})^{n-4}\times u_5$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\dfrac{3}{4})^{n-5}\times u_5$

ب) لدينا : $S_n = u_5+u_6+....+u_n$ ، و حسب

السؤال (أ) يصبح :
$$\begin{cases} u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5}\times u_5 \\ u_6 \leq (\frac{3}{4})^{6-5}\times u_5 \\ u_7 \leq (\frac{3}{4})^{7-5}\times u_5 \\ \vdots \\ u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5}\times u_5 \end{cases}$$
 بالجمع نجد :

$S_n \leq \left[(\dfrac{3}{4})^0 + (\dfrac{3}{4})^1 + (\dfrac{3}{4})^2 + ... + (\dfrac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$ ،

و منه : $S_n \leq \left[1 + \dfrac{3}{4} + (\dfrac{3}{4})^2 + ... + (\dfrac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$ ،

و هو المطلوب .

ج) أولا لنحسب المجموع : $\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول هو 1 ، و عدد حدودها هو : $n-4$ ، أي :

$$\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]=1\times\frac{1-(\frac{3}{4})^{n-4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]$$

نعلم أنّ : $1-(\frac{3}{4})^{n-4}<1$ أي : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]<4$ ،

و منه : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]u_5<4u_5$.

نعلم أنّ : $S_n\leq\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$

أي : $S_n\leq4\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]\times u_5$ ،

إذن : $S_n\leq4u_5$ ، و هو المطلوب .

3) لنبيّن أنّ المتتالية (S_n) متزايدة :

$$S_{n+1}-S_n=(u_5+u_6+...+u_n)-(u_5+u_6+...+u_{n+1})$$

و منه : $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

نلاحظ أنّ : $S_{n+1}-S_n>0$ ، إذن : المتتالية (S_n) متزايدة من أجل كل $n\geq5$.

*) المتتالية (S_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ $4u_5$

إذن : فستكون متقاربة .

حل التمرين الحادي عشر :

لدينا : $u_0=0$ ، $u_1=1$ و $u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}$

1) لدينا : $s_n=u_{n+1}+u_n$.

أ) لنبيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية :

$$s_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=7u_{n+1}+8u_n+u_{n+1}$$
$$=8u_{n+1}+8u_n=8(u_{n+1}+u_n)$$

و منه : $s_{n+1}=8s_n$ ، إذن المتتالية (s_n) هندسية ، أساسها 8 ، و حدها الأول : $s_0=u_1+u_0=1$.

ب) عبارة s_n بدلالة n :

$s_n=s_0\times q^n$ ، و منه : $s_n=8^n$.

2) لدينا : $v_n=(-1)^n\times u_n$ و $t_n=v_{n+1}-v_n$

*) التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$t_n=v_{n+1}-v_n=(-1)^{n+1}\times u_{n+1}-(-1)^n\times u_n$$
$$=(-1)^n\left[-1\times u_{n+1}-u_n\right]=(-1)^n\times(-u_{n+1}-u_n)$$
$$=-(-1)^n\times s_n=-(-1)^n\times8^n$$

و منه : $t_n=-(-8^n)$.

3) لنحسب المجموع : $t_0+t_1+...+t_{n-1}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى :

$$=-(-8)^0+(-(-8)^1)+...+(-(-8)^{n-1})$$
$$=-\left[1+(-8)+(-8)^2+...+(-8)^{n-1}\right]$$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها (-8) و حدها الأول هو : 1 ، و عدد حدودها هو : n حد .

$$t_0+t_1+...+t_{n-1}=-\frac{(-8)^n-1}{-8-1}=-\frac{(-8)^n-1}{-9}$$

و منه : $t_0+t_1+...+t_{n-1}=\frac{(-8)^n-1}{9}$.

الطريقة الثانية :

لدينا : $t_n=v_{n+1}-v_n$ ، أي :
$$\begin{cases}t_0=v_1-v_0\\t_1=t_2-v_1\\t_2=v_3-v_2\\ \vdots\\t_{n-1}=v_n-v_{n-1}\end{cases}$$

بالجمع نجد : $t_0+t_1+...+t_{n-1}=v_n-v_0$

و بما أنّ : $v_0=(-1)^0\times u_0=0$ ، فسيكون :

$$v_n=\frac{(-8)^n-1}{9}.$$

*) كتابة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=(-1)^n\times u_n$ ، أي :

. $u_n = \dfrac{v_n}{(-1)^n} = \dfrac{\frac{(-8)^n - 1}{9}}{(-1)^n}$

و منه : $u_n = \dfrac{(-8)^n - 1}{9\times(-1)^n}$.

*) حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{u_n}{8^n})$.

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{u_n}{8^n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n}}{8^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n(8)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(-8)^n-1}{9\times(-8)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{9\times(-8)^n}\right]$$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{u_n}{8^n}) = \dfrac{1}{9}$ ، لأنّ :

. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{9\times(-8)^n}\right] = 0$

حل التمرين الثاني عشر :

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.

1) حساب الحدود :

*) $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$

نعلم أنّ : $1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ ، أي :

. $u_1 = \sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$

*) $u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\dfrac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos\dfrac{\theta}{2})}$

$= \sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\theta}{4}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{4}} = 2\cos\dfrac{\theta}{4}$

*) $u_3 = \sqrt{2+u_2} = \sqrt{2+2\cos\dfrac{\theta}{4}} = \sqrt{2(1+\cos\dfrac{\theta}{4})}$

$= \sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\theta}{8}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{8}} = 2\cos\dfrac{\theta}{8}$

2) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$.

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $u_0 = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^0})$

و منه : $u_0 = 2\cos(\theta)$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$ ، و لنثبت أنّ :

. $u_{n+1} = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})$

لدينا : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ و أيضا : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$

أي : $u_{n+1} = \sqrt{2+2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})} = \sqrt{2(1+\cos(\dfrac{\theta}{2^n}))}$

$= \sqrt{2\times 2\cos^2(\dfrac{\theta}{2^n}\times\dfrac{1}{2})} = \sqrt{4\cos^2(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})}$

و منه : $u_{n+1} = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون: $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$

3) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$ ، و نعلم أنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{\theta}{2^n}) = 0$ و $\lim\limits_{n\to 0}\cos(n) = 1$ ،

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

حل التمرين الثالث عشر :

لدينا : $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) البرهان : لدينا $u_{n+1} \le 0,95u_n$ معناه أنّ :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le 0,95$ لأنّ : $(u_n > 0)$ وَ $(u_{n+1} > 0)$ ،

أي : $\dfrac{\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{2^n}} \le 0,95$ أي : $\dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\times\dfrac{2^n}{n^{10}} \le 0,95$

أي : $(1+\dfrac{1}{n})^{10}\times\dfrac{1}{2} \le 0,95$ ، ومنه : $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \le 1,9$

2) f الدالة المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^{10}$

أ) إتجاه التغيّر : $f'(x)=10\times(1+\frac{1}{x})^9\times(-\frac{1}{x^2})$ ،

نلاحظ أنّ : $f'(x)<0$ على $]1;+\infty[$ ،

و منه الدالة f متناقصة .

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	1024 $\searrow$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

ب) الدالة f مستمرة و رتيبة على $]1;+\infty[$ ،

وَ صورة المجال $]1;+\infty[$ هي $]1;1024]$ ،

وَ $1,9\in]1;1024]$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha)=1,9$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $\alpha\in]1;+\infty[$.

ج) بالحاسبة نجد : $15<\alpha<16$ ، أي : $(n_0=16)$.

د) **البرهان :** من أجل $n\geq16$ يكون : $f(n)\leq f(16)$

(لأنّ الدالة f متناقصة) ، أي : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq f(16)$

و لدينا : $f(16)<1,9$ ، و منه : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq1,9$.

3) أ) من أجل $n\geq16$ لدينا: $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq1,9$ معناه

أنّ : $u_{n+1}\leq0,95u_n$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq0,95<1$ ،

و منه فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

ب) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وَ محدودة من الأسفل بــ 0 لأنّ : $(u_n>0)$ ، ومنه فإنها **متقاربة** .

4) إثبات أنّ : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

من أجل $n\geq16$: (نستعمل البرهان بالتراجع) .

✓ تحقّق من أجل $n=16$:

$0\leq u_{16}\leq(0,95)^{16-16}\times u_{16}$ ، ومنه :

$0\leq u_{16}\leq u_{16}$ ، **محقّقة** .

✓ نفرض صحة : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$.

✓ و نثبت صحة : $0\leq u_{n+1}\leq(0,95)^{n+1-16}\times u_{16}$

أي : $0\leq u_{n+1}\leq(0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

البرهان : لدينا فرضا : $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

أي : $0\leq0,95\times u_n\leq0,95\times(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

أي: $0\leq0,95u_n\leq(0,95)^{n-15}\times u_{16}$ ،

وَ لدينا : $u_{n+1}\leq0,95u_n$ ،

ومنه : $0\leq u_{n+1}\leq(0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

إذن من أجل كل $n\geq16$: $0\leq u_n\leq(0,95)^{n-16}\times u_{16}$

❖ إستنتاج نهاية (u_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ ،

لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,95)^{n-16}=0$

(حسب خاصية النهايات بالحصر) .

حل التمرين الرابع عشر :

الجزء الأوّل :

لدينا : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$.

1) أ) التحقق من أنّ : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$.

$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}$ ،

و منه : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج أنّ الدالة f فردية :

*) D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 .

$f(-x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1}=1+\frac{1}{2}x-2(\frac{1}{e^{-x}+1})$

$=1+\frac{1}{2}x-2(1-\frac{1}{e^x+1})=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1}$

أي : $f(-x)=-(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1})$ ،

و منه : $f(-x)=-f(x)$.

إذن : الدال f فردية .

2) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

*) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$.

*) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+1} = 2$.

3)أ) لنحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}\right]$$

و منه : $f'(x) = -\frac{1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$ ، و هو المطلوب .

ب) بما أنّ : $f'(x) < 0$ فإنّ الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، و جدول تغيّراتها يكون كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

ج) الإستنتاج :

لدينا من أجل كل $x \geq 0$ الدالة f متناقصة ، أي :

$f(x) \leq f(0)$ ، أي : $1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} \leq 0$ ،

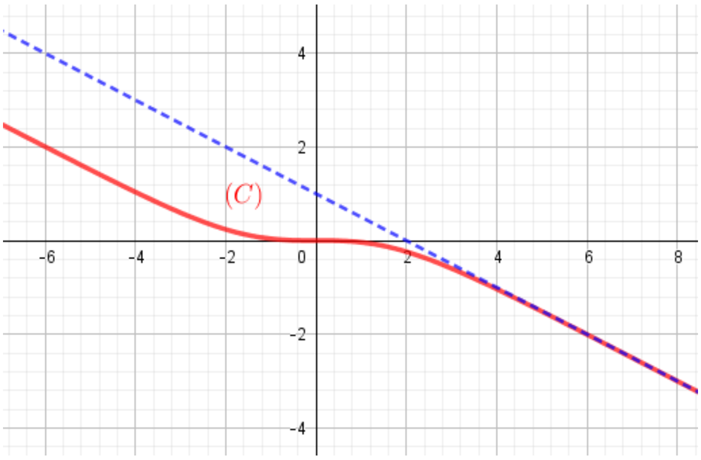
و منه : $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$ ، و هو المطلوب .

4) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (1 - \frac{1}{2}x)\right] = 0$ ، لأنّ :

$\lim_{x\to+\infty}(-\frac{2}{e^x+1}) = 0$.

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

5) الإنشاء :



الجزء الثاني :

لدينا : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $1 > 0$ ، و منه :

$u_0 > 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : $u_n > 0$ ، أي : $e^{u_n} > e^0$ ، أي : $e^{u_n} > 1$ ،

أي : $e^{u_n} + 1 > 2$ ، أي : $\frac{1}{e^{u_n}+1} < \frac{1}{2}$ ، أي :

$\frac{2}{e^{u_n}+1} < 1$ ، أي : $-\frac{2}{e^{u_n}+1} > -1$ ، و منه :

$1 - \frac{2}{e^{u_n}+1} > 0$ ، إذن : $u_{n+1} > 0$ ، و هو المطلوب.

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 0$.

2) لدينا من أجل كل $x \geq 0$: $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$ ،

بوضع : $x = u_n$ حيث : $u_n > 0$ ، فنتحصّل على :

$1 - \frac{2}{e^{u_n}+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ ، و منه : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

*) إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا مما سبق أنّ : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ ، أي :

$u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}u_n - u_n$ ، و منه :

$u_{n+1}-u_n \le -\frac{1}{2}u_n$ ، و بما أنّ : $u_n>0$ فإنّ :

$u_{n+1}-u_n<0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

3) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\le(\frac{1}{2})^n$

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $1\le(\frac{1}{2})^0$ ، أي :

$1\le(\frac{1}{2})^0$ ، و منه : $u_0\le(\frac{1}{2})^0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n\le(\frac{1}{2})^n$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1}\le(\frac{1}{2})^{n+1}$

لدينا : $u_n\le(\frac{1}{2})^n$ ، أي : $\frac{1}{2}u_n\le(\frac{1}{2})^{n+1}$ ، و بما أنّ :

$u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ ، إذن : $u_{n+1}\le(\frac{1}{2})^{n+1}$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n\le(\frac{1}{2})^n$.

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

بما أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ ، فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

(حسب مبرهنة النهايات بالحصر) .

حل التمرين الخامس عشر :

لدينا : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$.

1)أ)لنبرهن بالتراجع على أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$.$(n\in\mathbb{N}^*)$

*) لنتحقق من أجل $n=1$ ، أي : $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_0}$

أي : $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_1\le1$ (محققة) .

*) نفرض أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ و لنثبت : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_{n+1}\le1$

لدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ ، أي : $1+\frac{\sqrt{2}}{2}\le1+u_n\le2$

أي : $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\le\sqrt{1+u_n}\le\sqrt{2}$ ، أي :

$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1+u_n}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$ ،

إذن : $1\le u_{n+1}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و هو المطلوب .

*)و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$.

ب) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}-u_n$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}-u_n\times\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}\right]$$

$$=\frac{\frac{2}{4}(1+u_n)-u_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}=\frac{-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}$$

*) بما أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ إذن إشارة الفرق من إشارة

$-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$.

*) لندرس على $\mathbb{R}$ إشارة : $-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

نتحصّل على : أنّ على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ يكون :

$-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ge0$ و بما أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ ،

فإنّ : $-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}\ge0$ ، أي : $u_{n+1}-u_n\ge0$

و منه فإنّ : المتتالية (u_n) متزايدة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1

فهي متقاربة .

ج) تعيين l نهاية المتتالية(u_n) :

المتتالية (u_n) متقاربة ، أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$ ، أي :

$l=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+l}$ ، بما أنّ : $l\ge0$ فسيكون :

أي : $l^2 = \frac{2}{4}(1+l)$ ، أي : $l^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}l$ ، أي :

$l^2 - \frac{1}{2}l - \frac{1}{2} = 0$ ، و منه : $l = -\frac{1}{2}$ (مرفوض) ،

أو $l = 1$ (مقبول) ، إذن : النهاية l تساوي 1 .

2) أ) لنبيّن أنّ : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2})$ مع $x \in [0;\pi]$

نعلم أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0;\pi]$ ، يكون :

$1+\cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ ، أي : $\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2(\frac{x}{2})$ ،

أي : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\cos^2(\frac{x}{2})}$ ، أي أنّ :

$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \left|\cos(\frac{x}{2})\right|$. (بما أنّ : $0 \le x \le \pi$ ، أي :

$0 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2}$ ، و منه : $\cos(\frac{x}{2}) \ge 0$.

إذن : من أجل $x \in [0;\pi]$ يكون : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2})$

ب) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 = \cos(\frac{\pi}{2})$ ،

و منه : $u_0 = 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ و لنثبت أنّ :

$u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$.

لدينا : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$ و $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ ،

أي : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}$ ، $(\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}})$

أي : $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}$ ، أي :

$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}{2}}$ ، و بما أنّ :

$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2})$ ، فإنّ : $u_{n+1} = \cos(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2})$ ،

أي : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2\times 2^{n+1}})$ ، و منه : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

إذن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

ج) إيجاد ثانية نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 0$ و $\lim_{n\to 0}\cos(n) = 1$ ،

و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019

دعواتكم الخالصة لنا بالصحة و العافية

الأستاذ : ب.ع